冬期講習　難関大　理系数学

目　　次

第１講　基本計算 ―― p.2
第２講　漸化式と極限 ―― p.3
第３講　回転体の体積（その１） ―― p.4
第４講　回転体の体積（その２） ―― p.5
第５講　絶対値付き積分 ―― p.6
第６講　複素数 ―― p.7

第１講　基本計算

1　［A］　次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos^2 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)e^x\log x\,dx$

［B］　次の問いに答えよ．ただし，e は $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ で定められる無理数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{e^x-1}{x}=1$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)+\log(n+2)+\log(n+3)+\cdots+\log(n+2n)-2n\log n}{n}$ を求めよ．

第２講　漸化式と極限

2　次の漸化式によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．ただし $a_1=1$ とする．

(1)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2^{n+1}+1}{2^n}$

(3)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+n$

(4)　$a_{n+1}=\sqrt{a_n}+2$

第３講　回転体の体積（その１）

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$C : y=e^x$ に対して，原点を通る C の接線を l とする．C と l と y 軸によって囲まれる部分を x 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_1 と，y 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_2 をそれぞれ求めよ．

(2)　$\dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2 \leqq 1$ を x 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_3 を求めよ．

(3)　$C : y=\sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $l : y=1$ と y 軸によって囲まれる部分を y 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_4 を求めよ．

第４講　回転体の体積（その２）

4　次の各問いに答えよ．

(1)　2 つの不等式 $x^2+y^2+z^2 \leqq 4$ と $\dfrac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1$ の共通部分 D の体積 V_1 を求めよ．

(2)　A(2,　0,　0)，B(0,　1,　1) に対して，直線 AB を z 軸まわりに回転してできる曲面を x，y，z で表せ．また，その曲面と 2 つの平面 $z=0$ と $z=1$ で囲まれた部分の体積 V_2 を求めよ．

第５講　絶対値付き積分

5　次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=2\sin x-x\cos x$ とする．$0<x<\pi$ において $f(x)>0$ であることを示せ．

(2)　$g(x)=\sin x-kx^2$ (k は正の定数) とする．$0<x<\pi$ において $g(x)=0$ の実数解はただ１つだけ存在することを示せ．

(3)　正の定数 k に対して，

$$\int_0^{\pi}|\sin x-kx^2|dx$$

の値を最小にする k を求めよ．

第６講　複素数

6　［A］　次の各問いに答えよ．

(1)　α，β を複素数とする．α の共役複素数を $\overline{\alpha}$ と表すとき，$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ であることを示せ．また，α が実数であるための必要十分条件が $\alpha=\overline{\alpha}$ であることを示せ．

(2)　実数係数の3次方程式 $az^3+bz^2+cz+d=0$ が複素数 α を解にもつとき $\overline{\alpha}$ も解となることを示せ．

［B］　$\omega=\dfrac{4+3i}{5}$ とする．複素数列 $\{\alpha_n\}$ を

$$\alpha_{n+1}=\omega\alpha_n+(1-\omega)i,\quad \alpha_0=0$$

で定めることとする．O(0)，A(α_1)，B(α_2)，C(α_3) とおくとき，四角形OABCの面積を求めよ．

テキスト解答

第１講　基本計算

1　［A］　次の定積分を計算せよ．

（1）$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$

（2）$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}dx$

（3）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos^2 x\,dx$

（4）$\displaystyle\int_1^2 (x+1)e^x\log x\,dx$

［B］　次の問いに答えよ．ただし，e は $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ で定められる無理数とする．

（1）$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{e^x-1}{x}=1$ を示せ．

（2）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を示せ．

（3）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)+\log(n+2)+\log(n+3)+\cdots+\log(n+2n)-2n\log n}{n}$ を求めよ．

【答】　［A］（1）$\dfrac{2-2\log 2+\pi}{4}$　（2）$\log\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{6}$　（3）$\dfrac{8}{105}$　（4）$(2\log 2-1)e^2+e$

［B］（1）略　（2）略　（3）$3\log 3-2$

【解説】　［A］（1）$\dfrac{x^3+1}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}$ であり

$$\int_0^1\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1-\log 2}{2}$$

と

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

より　$\displaystyle\int_0^1\frac{x^3+1}{x^2+1}dx=\frac{2-2\log 2+\pi}{4}$

（2）$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}dx=\int_0^1\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right\}dx=\left[\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+\frac{1}{x+2}\right]_0^1$

$$=\log\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$$

（3）$t=\cos x$ と置換積分することにより

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos^2 x\,dx=\int_0^1(t^2-2t^4+t^6)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{2}{5}t^5+\frac{t^7}{7}\right]_0^1=\frac{8}{105}$$

（4）$\displaystyle\int_1^2(x+1)e^x\log x\,dx=\Big[(x\log x-1)e^x\Big]_1^2=(2\log 2-1)e^2+e$

［B］ (1)　$e^x-1=t$ とおくと $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{t}{\log(1+t)}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}}=1$

(2)　$f(t)=e^t-t$ とおくと $f'(t)=e^t-1$ より，$t>0$ において $f'(t)>0$ であることと $f(0)>0$ より，$t>0$ において $f(t)>0$ つまり $e^t>t$.

ここで $t=\dfrac{x}{2}$ とおくと，$x>0$ であり，$e^{\frac{x}{2}}>\dfrac{x}{2}$ $\iff$ $e^x>\dfrac{x^2}{4}$ つまり $\dfrac{4}{x}>\dfrac{x}{e^x}>0$ を得る.

これと $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$.

(3)　$\displaystyle(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^2\log(1+x)dx=\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^2$

$=3\log 3-2$

第２講　漸化式と極限

2　次の漸化式によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．ただし $a_1=1$ とする．

(1)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2^{n+1}+1}{2^n}$

(3)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+n$

(4)　$a_{n+1}=\sqrt{a_n}+2$

【答】 (1)　2　　(2)　3　　(3)　∞　　(4)　4

【解説】 (1)　与式は $a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$ と変形できるので，

$a_n-2=(a_1-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\to 0\ (n\to\infty)$ より $\lim_{n\to\infty} a_n=2$.

(2)　与式は $2^{n+1}(a_{n+1}-3)-6=\dfrac{2}{3}\{2^n(a_n-3)-6\}$ と変形できるので

$2^n(a_n-3)-6=\{2^1(a_1-3)-6\}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ より $a_n=3+\dfrac{3}{2^{n-1}}-5\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\to 3\ (n\to\infty)$ なので

$\lim_{n\to\infty} a_n=3$.

(3)　$a_1=1$ より $n=1$ のとき $a_n\geqq n-1$ が成り立つので，$n=k(\geqq 1)$ のとき $a_k\geqq k-1$ の成立を仮定すると，$a_{k+1}\geqq\dfrac{1}{2}(k-1)+k$ なので $a_{k+1}\geqq(k+1)-1$ が成り立つ.

よって任意の自然数について $a_n\geqq n-1$ が成り立つので $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$.

(4)　与式は $a_{n+1}-4=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}+2}(a_n-4)$ と変形できる．ここで $0<\dfrac{1}{\sqrt{a_n}+2}\leqq\dfrac{1}{2}$ より

$$|a_{n+1}-4|=\left|\frac{1}{\sqrt{a_n}+2}(a_n-4)\right|\leqq\frac{1}{2}|a_n-4|$$

となるので $|a_n-4|\leqq|a_1-4|\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\to 0\ (n\to\infty)$ より $\lim_{n\to\infty} a_n=4$.

第３講　回転体の体積（その１）

3 次の各問いに答えよ．

(1) $C: y=e^x$ に対して，原点を通る C の接線を l とする．C と l と y 軸によって囲まれる部分を x 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_1 と，y 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_2 をそれぞれ求めよ．

(2) $\dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2 \leqq 1$ を x 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_3 を求めよ．

(3) $C: y=\sin x\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $l: y=1$ と y 軸によって囲まれる部分を y 軸まわりに回転させたときにできる立体の体積 V_4 を求めよ．

【答】 (1) $V_1=\dfrac{e^2-3}{6}\pi,\ V_2=\dfrac{6-2e}{3}\pi$ (2) $4\pi^2$ (3) $\dfrac{\pi(\pi^2-8)}{4}$

【解説】 (1) $y=e^x$ より $y'=e^x$ なので, $x=t$ における C の接線は $y=e^t(x-t)+e^t$ となる．これが原点を通るので $0=e^t(-t)+e^t$ より $t=1$．よって $l: y=ex$ であり，接点は $(1,\ e)$ である．

このとき

$$V_1 = \int_0^1 \pi(e^x)^2dx-\frac{e^2\pi\times 1}{3}=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\frac{e^2\pi}{3}=\frac{e^2-3}{6}\pi,$$

$$V_2 = \frac{1^2\pi\times e}{3}-\int_1^e \pi(\log y)^2dy=\frac{e}{3}\pi-\pi\Big[y(\log y)^2-2y\log y+2y\Big]_1^e=\frac{6-2e}{3}\pi$$

である．

(2) $\dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$ より $y=1\pm\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ なので

$$\begin{aligned}
V_3 &= \int_{-2}^2 \pi\left(1+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2dx-\int_{-2}^2\pi\left(1-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2dx \\
&= 4\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}|2\cos\theta|\cdot 2\cos\theta\,d\theta \quad (x=2\sin\theta \text{ と置換した}) \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(1+\cos 2\theta)d\theta \\
&= 4\pi\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\pi^2
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
V_4 &= \int_0^1 \pi x^2dy \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx \quad (y=\sin x \text{ と置換した}) \\
&= \pi\Big[x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi(\pi^2-8)}{4}
\end{aligned}$$

第４講　回転体の体積（その２）

4　次の各問いに答えよ．

(1)　2 つの不等式 $x^2+y^2+z^2 \leqq 4$ と $\dfrac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1$ の共通部分 D の体積 V_1 を求めよ．

(2)　A(2, 0, 0), B(0, 1, 1) に対して，直線 AB を z 軸まわりに回転してできる曲面を x, y, z で表せ．また，その曲面と 2 つの平面 $z=0$ と $z=1$ で囲まれた部分の体積 V_2 を求めよ．

【答】　(1)　$\dfrac{16(3\sqrt{3}+2\pi)}{9}$　　(2)　$x^2+y^2=5z^2-8z+4$, $V_2=\dfrac{5}{3}\pi$

【解説】　(1)　D を平面 $x=t$ で切ったときの断面は

$$t^2+y^2+z^2 \leqq 4 \text{ かつ } \frac{t^2}{4}+y^2 \leqq 1 \iff y^2+z^2 \leqq 4-t^2 \text{ かつ } y^2 \leqq \frac{4-t^2}{4}$$

これら 2 式を満たす実数 y と z が存在する条件は $4-t^2 \geqq 0$ かつ $\dfrac{4-t^2}{4} \geqq 0$ つまり $-2 \leqq t \leqq 2$ となり，この条件のもとで

$$y^2+z^2 \leqq 4-t^2 \text{ かつ } -\frac{\sqrt{4-t^2}}{2} \leqq y \leqq \frac{\sqrt{4-t^2}}{2}$$

とできるので，この断面積は

$$\left(\sqrt{4-t^2}\right)^2\pi\times\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-t^2}\right)^2\sin\frac{2}{3}\pi\times 2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)(4-t^2)$$

となる．よって

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{-2}^{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)(4-t^2)dt=2\int_{0}^{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)(4-t^2)dt \\ &= 2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\left(4t-\frac{t^3}{3}\right)\right]_0^2=\frac{16(3\sqrt{3}+2\pi)}{9} \end{aligned}$$

(2)　直線 AB 上の点を P とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= (1-t)(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 1,\ 1) \\ &= (-2t+2,\ t,\ t)\quad (t \text{ は実数}) \end{aligned}$$

と表せる．ここで Q(0, 0, t) とおくと，求める曲面を $z=t$ で切った断面は，平面 $z=t$ 上で Q を中心として半径 QP の円となるので

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \mathrm{QP}^2 \\ &= (-2t+2)^2+t^2+0^2 \\ &= 5t^2-8t+4 \end{aligned}$$

より求める曲面を表す方程式は $x^2+y^2=5z^2-8z+4$.

ゆえに

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi\int_0^1(5t^2-8t+4)dt \\ &= \pi\left[\frac{5}{3}t^3-4t^2+4t\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{3}\pi \end{aligned}$$

第５講　絶対値付き積分

5 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)=2\sin x-x\cos x$ とする．$0<x<\pi$ において $f(x)>0$ であることを示せ．

(2) $g(x)=\sin x-kx^2$ (k は正の定数) とする．$0<x<\pi$ において $g(x)=0$ の実数解はただ１つだけ存在することを示せ．

(3) 正の定数 k に対して，

$$\int_0^{\pi}|\sin x-kx^2|dx$$

の値を最小にする k を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) 略　(3) $\dfrac{\sqrt[3]{4}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt[3]{2}}}{\pi^2}$

【解説】 (1) $f(x)=2\sin x-x\cos x$ より $f'(x)=\cos x+x\sin x$，$f''(x)=x\cos x$ となるので，

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	1	↗		↘	-1

を得る．これにより $f'(x)=0$ かつ $0<x<\pi$ を満たす実数解はただ１つだけ存在するので，それを β とすると

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	π

より，$0<x<\pi$ において $f(x)>0$ であることが示された．

(2) $g(x)=\sin x-kx^2$ より $g'(x)=\cos x-2kx$，$g''(x)=-\sin x-2k$ であり，$0\leqq x\leqq\pi$ のとき $-\sin x\leqq 0$ で，また $k>0$ より，$g''(x)<0$ とわかる．この結果と $g'(0)=1>0$，$g'(\pi)=-1-2k\pi<0$ より $g'(x)=0$ かつ $0<x<\pi$ を満たす実数解はただ１つだけ存在するので，それを γ とすると

x	0	$\cdots$	γ	$\cdots$	π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗		↘	$-k\pi^2$

よって，$0<x<\pi$ において $g(x)=0$ の実数解はただ１つだけであることが示された．

(3)　(2)の結果より，$g(x)=0$ のただ１つの実数解を α とおくと α は

$$k\alpha^2=\sin\alpha \text{ かつ } 0<\alpha<\pi$$

を満たす．このとき

$$\begin{aligned}\int_0^\pi|\sin x-kx^2|dx &= \int_0^\alpha(\sin x-kx^2)dx+\int_\alpha^\pi(-\sin x+kx^2)dx\\ &= \left[-\cos x-\frac{k}{3}x^3\right]_0^\alpha+\left[\cos x+\frac{k}{3}x^3\right]_\alpha^\pi\\ &= -2\cos\alpha-\frac{2}{3}k\alpha^3+\frac{\pi^3}{3}k \quad \cdots①\end{aligned}$$

となる．ここで $k\alpha^2=\sin\alpha \iff k=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha^2}$ を代入すると

$$\begin{aligned}① &= -2\cos\alpha-\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\cdot\alpha^3+\frac{\pi^3}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\\ &= -2\cos\alpha-\frac{2}{3}\alpha\sin\alpha+\frac{\pi^3}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\end{aligned}$$

これを $h(\alpha)$ とおくと

$$\begin{aligned}h'(\alpha) &= 2\sin\alpha-\frac{2}{3}(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)+\frac{\pi^3}{3}\cdot\frac{-2\sin\alpha+\alpha\cos\alpha}{\alpha^3}\\ &= \frac{2\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{3\alpha^3}(2\alpha^3-\pi^3)\end{aligned}$$

となるが，$\alpha^3>0$ であり，(1)より $0<\alpha<\pi$ のとき $2\sin\alpha-\alpha\cos\alpha>0$ なので，$\alpha_1=\dfrac{\pi}{\sqrt[3]{2}}$

とおくと

α	0	$\cdots$	α_1	$\cdots$	π
$h'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$h(\alpha)$		↘		↗	

より $\alpha=\alpha_1$ のとき与式は最小となる．よって求める k は $k=\dfrac{\sin\alpha_1}{{\alpha_1}^2}=\dfrac{\sqrt[3]{4}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt[3]{2}}}{\pi^2}$

第６講　複素数

6 ［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) α，β を複素数とする．α の共役複素数を $\overline{\alpha}$ と表すとき，$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ であることを示せ．また，α が実数であるための必要十分条件が $\alpha=\overline{\alpha}$ であることを示せ．

(2) 実数係数の 3 次方程式 $az^3+bz^2+cz+d=0$ が複素数 α を解にもつとき $\overline{\alpha}$ も解となることを示せ．

［B］ $\omega=\dfrac{4+3i}{5}$ とする．複素数列 $\{\alpha_n\}$ を

$$\alpha_{n+1}=\omega\alpha_n+(1-\omega)i,\quad \alpha_0=0$$

で定めることとする．O(0)，A(α_1)，B(α_2)，C(α_3) とおくとき，四角形 OABC の面積を求めよ．

【答】 ［A］(1) 略　(2) 略　［B］ $\dfrac{54}{125}$

【解説】 ［A］(1) 実数 a，b，c，d を用いて $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ と表す．このとき

$$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}-(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) &= \overline{(a+c)+(b+d)i}-(\overline{a+bi}+\overline{c+di})\\ &= (a+c)-(b+d)i-(a-bi+c-di)=0\\ \overline{\alpha\beta}-\overline{\alpha}\,\overline{\beta} &= \overline{(a+bi)(c+di)}-\overline{a+bi}\;\overline{c+di}\\ &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}-(a-bi)(c-di)\\ &= (ac-bd)-(ad+bc)i-\{(ac-bd)-(ad+bc)i\}=0\end{aligned}$$

より $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ が示された．

また $\alpha=a+bi$ において，α が実数のとき $b=0$ なので $\alpha=a+0i$ となり $\overline{\alpha}=a-0i$ より $\alpha=\overline{\alpha}$．

逆に $\alpha=\overline{\alpha}$ のとき，$a+bi=a-bi \iff 2bi=0$ より $b=0$ つまり α は実数となる．

よって $\alpha=\overline{\alpha}$ は α が実数であるための必要十分条件である．

(2) α が解であることより

$$\begin{aligned}a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0 &\iff \overline{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}=\overline{0}\\ &\iff \overline{a}\,\overline{\alpha}^3+\overline{b}\,\overline{\alpha}^2+\overline{c}\,\overline{\alpha}+\overline{d}=\overline{0}\end{aligned}$$

ここで a，b，c，d，0 は実数より $\overline{a}=a$，$\overline{b}=b$，$\overline{c}=c$，$\overline{d}=d$，$\overline{0}=0$ なので $a\overline{\alpha}^3+b\overline{\alpha}^2+c\overline{\alpha}+d=0$ つまり $\overline{\alpha}$ も解となることが示された．

［B］ $\alpha_{n+1}=\omega\alpha_n+(1-\omega)i \iff \alpha_{n+1}-i=\omega(\alpha_n-i)$ であり，この式と $\alpha_0=0$ より帰納的に $\alpha_n\neq i$ なので，D(i)，$\arg\omega=\theta$ とおくと

$$\mathrm{DO}=\mathrm{DA}=\mathrm{DB}=\mathrm{DC}=1,\ \angle\mathrm{ODA}=\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{BDC}=\theta$$

であることがわかる．

ここで $\omega=\dfrac{4+3i}{5}$ より $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ なので，$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ つまり $\dfrac{\pi}{2}<3\theta<\dfrac{3}{4}\pi$ となることより求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta\times 3-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 3\theta &= \frac{1}{2}(3\sin\theta-\sin 3\theta)\\ &= 2\sin^3\theta\\ &= 2\left(\frac{3}{5}\right)^3\\ &= \frac{54}{125}\end{aligned}$$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。